Теоретический материал

Определение. Пусть **A** – точное значение некоторой величины,

a – приближенное значение к числу **A**.

- ***Погрешностью*** приближенного числа **a** называется разность $\Delta a = A - a$,
- ***Абсолютной погрешностью*** приближенного числа **a** называется величина, равная $\Delta = |A - a|$

На практике точное число **A** обычно неизвестно, однако мы всегда можем указать границы, в которых изменяется величина абсолютной погрешности.

- ***Предельной абсолютной погрешностью*** приближенного числа **a** называется наименьшая из верхних границ для величины Δ, которую можно найти при данном способе получения числа **a**: $\Delta \le \Delta_a$
- ***Относительной погрешностью*** приближенного числа **a** называется величина, равная
$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}, \quad a \ne 0$$
- ***Предельной относительной погрешностью*** приближенного числа **a** называется величина, равная $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad a \ne 0$
- Если a и b - приближенные числа и Δ_a, Δ_b - их предельные абсолютные погрешности, тогда погрешности результатов арифметических действий над этими числами вычисляются так:

$$\Delta_{a+b} \le \Delta_a + \Delta_b$$
$$\Delta_{a-b} \le \Delta_a + \Delta_b$$
$$\delta_{ab} \le \delta_a + \delta_b$$
$$\delta_{\frac{a}{b}} \le \delta_a + \delta_b$$

Пример

Образец выполнения 20-го варианта:

Задание 1. Какое из равенств $51/11 = 4{,}64; \quad \sqrt{35} = 5{,}91$ точнее.

Решение

Качество вычисления определяем с помощью относительной погрешности. Точнее будет то число, относительная погрешность которого меньше. аходим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков:

a_1=51/11=4,636363636,

$a_2 = \sqrt{35} = 5{,}916079783$;

Затем вычисляем предельные абсолютные, округляя их с избытком:
Δa_1=|4,636363636-4,64|=0,003636364<0,0037

Δa_2=|5,916079783-5,91|=0,006079783<0,0061
Предельные относительные погрешности составляют:

$$\delta_{a1} = \frac{0{,}0037}{4{,}64} = 0{,}000797414 < 0{,}0008 = 0{,}08\%;$$

$$\delta_{a2} = \frac{0{,}0061}{5{,}91} = 0{,}001032149 < 0{,}0011 = 0{,}11\%;$$

Ответ: Так как $\delta_{a1} < \delta_{a2}$, то равенство $51/11 = 4{,}64$ является более точным.

Задание 2. Округлить сомнительные цифры числа 0,66835±0,0011, оставив верные знаки:
а) в узком смысле,
б) в широком смысле.
Согласно условию погрешность Δa=0,0011 < 0,005; это означает, что в числе a=0,66835 верными в узком смысле являются цифры 6, 6. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив сотые доли: a_1=0,67;
$\Delta a_1 = \Delta a + \Delta_{окр}$ = 0,0011 + |0,67 - 0,66835| = 0,0011 + 0,00165 = 0,00275 < 0,005
Ответ: Так как Δa_1 < 0,005, то обе цифры числа 0,67 верны в узком смысле.

Задание 3. Дано $Z = \dfrac{ab}{3c+d}$,

a = 2,5 ± 0,004;　　　　b = 11,2 ± 0,015,
c = 0,3 ± 0,02;　　　　d = 3.45 ± 0,01.

Оценить погрешность результата, и оставить в нем только верные значащие цифры в строгом смысле.
Решение:

$$Z = \frac{2{,}5 \cdot 11{,}2}{3 \cdot 0{,}3 + 3{,}45} = 6{,}437;$$

$$\Delta_a = 0{,}004; \qquad \delta_a = 0{,}0016$$
$$\Delta_b = 0{,}015; \qquad \delta_b = 0{,}0134$$
$$\Delta_c = 0{,}02; \qquad \delta_c = 0{,}067$$
$$\Delta_d = 0{,}01; \qquad \delta_d = 0{,}0029$$

$$\Delta_{3c+d} = 3 \cdot \Delta_c + \Delta_d = 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}07;$$

$$\delta_{3c+d} = \frac{\Delta_{3c+d}}{3c+d} = \frac{0{,}07}{4{,}35} = 0{,}0161$$

$$\delta_Z = \delta_a + \delta_b + \delta_{3c+d} = 0{,}0016 + 0{,}0134 + 0{,}0161 = 0{,}0311$$

$$Z = \frac{2{,}5 \cdot 11{,}2}{3 \cdot 0{,}3 + 3{,}45} = 6{,}437; \qquad \Delta_Z = Z \cdot \delta_Z = 0{,}200$$

Поскольку $0{,}05 < \Delta_Z < 0{,}5$, округляем результат до единиц: $Z \approx 6$

Абсолютная погрешность округления

$$\Delta_{окр} = 6{,}437 - 6 = 0{,}437$$

Тогда общая погрешность

$$\Delta = \Delta_{окр} + \Delta_Z = 0{,}437 + 0{,}200 = 0{,}637 > 0{,}5$$

И в нашем результате нет ни одной верной значащей цифры.

Задание 4. Вычислить значение функции F= $5e^x + 3{,}4^{-y}$ и ее предельные абсолютную и относительную погрешности, если известны погрешности ее аргументов x=0,52 ± 0,004, y= 2 ± 5%. Найти количество верных значащих цифр функции F (в широком и узком смысле).

По условию x=0,52; Δ_x=0,004; y=2; δ_y=0,05. Найдем абсолютную погрешность числа y: $\Delta_y = y \cdot \delta_y = 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1$.

Предельная абсолютная погрешность функции вычисляется по формуле:

$$\Delta_F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y$$

Применяя эту формулу, имеем:

$$\Delta_F = 5e^x \cdot \Delta x + \left|-3{,}4^{-y} \ln(3{,}4)\right| \cdot \Delta y = 5e^{0{,}52} \cdot 0{,}004 + 3{,}4^{-2} \cdot 0{,}1 = 0{,}042291072 < 0{,}043$$

Для функции F находим: F = $5e^x + 3{,}4^{-y} = 5e^{0{,}52} + 3{,}4^{-2} = 8{,}496643439$

Учитывая предельную абсолютную погрешность $\Delta_F = 0{,}043 < 0{,}05$, получаем результат, который имеет 2 верные значащие цифры в узком смысле.

Ответ: F =8,5±0,05.