

Теоретический материал к лабораторной работе №2

Общий вид нелинейного уравнения: $f(x)=0$

где функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a,b]$.

Определение 1. Любое число $x^* \in [a,b]$, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, называется **корнем** уравнения.

Решить уравнение – найти множество всех корней уравнения.

Приближенное нахождение корней состоит из двух этапов:

1 этап. Отделение корней – нахождение как можно меньших промежутков, каждый из которых содержит один и только один корень уравнения;

2 этап. Уточнение корней до заданной степени точности $\varepsilon > 0$: на каждом таком промежутке найти приближенный корень $\bar{x}$ такой, что $|\bar{x} - x^*| \leq \varepsilon$, где x^* – точный корень уравнения.

Аналитический метод отделения корней.

Корень уравнения (1) отделен на отрезке $[a, b]$, если:

1. на концах отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков: $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. на этом отрезке первая производная функции сохраняет знак: $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$),
3. на отрезке $[a, b]$ вторая производная сохраняет знак: $f''(x) > 0$ (или $f''(x) < 0$).

Методы решения нелинейных уравнений

Метод половинного деления (метод дихотомии) основан на многократном делении отрезков пополам.

Пусть корень отделен на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Разделить отрезок пополам точкой $c = (a+b)/2$.

Из двух полученных отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ выбрать тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

Длина нового отрезка равна $\frac{b-a}{2}$. Полученный отрезок обозначить как $[a, b]$ и снова поделить пополам.

Процесс деления отрезка пополам производится до тех пор, пока на каком-то n -ом шаге получится отрезок, длина которого меньше заданной точности, т.е. $|b-a| \leq \varepsilon$. За приближенное значение корня

принять $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

Погрешность решения на n -м шаге будет равна: $\Delta = \frac{(b-a)}{2^{n+1}}$

Метод хорд (секущих)

Пусть корень x^* уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a,b]$.

Формула метода хорд:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(z - x_i)}{f(z) - f(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

где z – неподвижный конец. Начальное приближение x_0 выбирается из условия: $f(x) \cdot f''(x) < 0$, т.е.

$x_0 = a$, если $f(a) \cdot f''(a) < 0$. В этом случае $z = b$.

$x_0 = b$, если $f(b) \cdot f''(b) < 0$. В этом случае $z = a$.

Метод Ньютона (касательных)

Общая формула метода Ньютона:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Начальное приближение x_0 выбирается из условия: $f(x) \cdot f''(x) > 0$

$x_0 = a$, если $f(a) \cdot f''(a) > 0$.

$x_0 = b$, если $f(b) \cdot f''(b) > 0$.

Оценка погрешности приближенного решения метода хорд и метода касательных

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad \text{где } m = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

Критерий окончания счета. Вычисления по методу хорд и методу касательных следует прекратить

как только $\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$, где x_n – приближение к корню на n -ом шаге.

Кроме общей формулы оценки погрешности можно использовать формулу:

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Если значение производной вблизи корня мало, то формулу Ньютона применять не рекомендуется.

Алгоритм:

1. Ввести исходные данные
а, b – границы поиска корня
eps – точность уточнения корня
2. Задать функцию и ее производные
3. Вычислить m для того, чтобы использовать его значение в критерии окончания счета.
4. Определить начальное приближение.
5. Повторять вычисление приближений по формуле Ньютона, пока не будет достигнута точность eps.
6. Вывести результат (корень x) на экран.

Метод простой итерации

Уравнение $f(x)=0$ следует привести к виду $x = \varphi(x)$, например по формуле:

$$x = x - \frac{f(x)}{M}, \quad \text{где } M = \begin{cases} \max f'(x), & \text{если } f'(x) > 0 \\ \min f'(x), & \text{если } f'(x) < 0 \end{cases}$$

Уточнение корня производится по формуле:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Условия сходимости итерационного процесса определяется теоремой:

Теорема. Пусть выполнены условия:

- 1) функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;
- 2) все значения $\varphi(x) \in [a, b]$ для всех $x \in [a, b]$ (условие отображения отрезка в себя);
- 3) существует такое число q , $0 < q < 1$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ (условие сжимаемого отображения)

Тогда итерационный процесс сходится независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ есть единственный корень уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ (существование неподвижной точки).

Оценка погрешности метода $\left| x^* - x_k \right| \leq \frac{q}{1-q} \left| x_k - x_{k-1} \right|$ (4)

критерий окончания счета при достижении точности ε приближенного решения:

$$\left| x_k - x_{k-1} \right| \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{q}$$

число q (константа Липшица) выбирается по формуле:

$$q = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1.$$

Алгоритм:

1. Ввести исходные данные
2. a, b – границы поиска корня
3. ε – точность уточнения корня
4. Задать функцию и ее производную
5. Получить итерационный вид функции
6. Вычислить M, m, q
7. Определить начальное приближение x_0 к корню.
8. Повторять вычисление приближений по формуле простой итерации, пока не будет достигнута точность ε .
9. Вывести результат (корень x) на экран.