

Теоретический материал

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ на основании ряда значений подынтегральной функции.

Формулы для приближенного вычисления однократного интеграла, называют *квадратурными формулами*.

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$

Квадратурные формулы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \text{- формула левых прямоугольников}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad \text{- формула правых прямоугольников}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad \text{- формула средних прямоугольников}$$

Оценка погрешности метода левых и правых прямоугольников вычисляется по формуле:

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a) \cdot h}{2} \cdot M_1, \quad \text{где} \quad M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

Пусть функции $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда оценка погрешности метода средних прямоугольников имеет вид:

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a) \cdot h^2}{24} \cdot M_2, \quad \text{где} \quad M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Квадратурная формула трапеции

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Ее остаточный член оценивается по формуле

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a) \cdot h^2}{12} \cdot M_2, \quad \text{где} \quad M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|,$$

Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} ((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}))$$

Пусть функция четырежды непрерывно дифференцируема на отрезке, тогда оценка остаточного члена формулы Симпсона дается формулой:

$$|R_n| \leq M_4 \frac{(b-a) \cdot h^4}{180}, \quad M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

Практический способ подсчета погрешности квадратурных формул

Пусть I_h и I_{2h} – приближенные значения интеграла, полученные по формуле Симпсона с шагом h и $2h$.

Для формулы левых и правых прямоугольников погрешность по методу двойного пересчета (метод Рунге) равна:

$$|R| = |I_h - I_{2h}|$$

Для формулы трапеции и средних прямоугольников:

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{3}$$

Для формулы Симпсона:

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{15}$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} \quad \text{по квадратурным формулам, полагая } n=4$$

Решение:

Разобьем отрезок интегрирования на $n = 4$ равных частей с шагом h .

$$n = 4 \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

Определим узловые точки и вычислим значение функции в узловых точках.

$$x_0 = 1 \quad y_0 = f(x_0) = \frac{1}{x_0 + 2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 2 \quad y_1 = f(x_1) = \frac{1}{x_1 + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = 3 \quad y_2 = f(x_2) = \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$x_3 = 4 \quad y_3 = f(x_3) = \frac{1}{x_3 + 2} = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$x_4 = 5 \quad y_4 = f(x_4) = \frac{1}{x_4 + 2} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}$$

1) По формуле левых прямоугольников имеем:

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 0,95$$

Оценим погрешность

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+2} \right)' = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad M_1 = \max_{1 \leq x \leq 5} \left| -\frac{1}{(x+2)^2} \right| = \frac{1}{9} < 0,12$$

$$|R_n| \leq \frac{b-a}{2} h M_1 = 2 \cdot 0,12 = 0,24$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = 0,95 \pm 0,24$$

2) По формуле правых прямоугольников:

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0,7595$$

Оценим погрешность

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = 0,76 \pm 0,24$$

3) По формуле средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{dx}{x+2} &= h(f(x_0 + h/2) + f(x_1 + h/2) + f(x_2 + h/2) + f(x_3 + h/2)) = \\ &= \frac{1}{1,5+2} + \frac{1}{2,5+2} + \frac{1}{3,5+2} + \frac{1}{4,5+2} = \frac{1}{3,5} + \frac{1}{4,5} + \frac{1}{5,5} + \frac{1}{6,5} = 0,8436 \end{aligned}$$

Оценим погрешность

$$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \quad M_2 = \max_{1 \leq x \leq 5} \left| \frac{2}{(x+2)^3} \right| = \frac{2}{27} < 0,15$$

$$|R| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = 0,15/6 = 0,015$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = 0,844 \pm 0,015$$

4) По формуле трапеций

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = h \left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 0,8547$$

Оценим погрешность

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = 0,15/3 = 0,03$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = 0,855 \pm 0,03$$

5) По формуле Симпсона

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = \frac{h}{3} (y_0 + y_5 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) + 2 \cdot \frac{1}{5} \right) = 0,8476$$

Оценим погрешность

$$f^{IV}(x) = \frac{24}{(x+2)^5} \quad M_4 = \max_{1 \leq x \leq 5} \left| \frac{24}{(x+2)^5} \right| = \frac{8}{81} < 0,1$$

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 = 0,1/45 = 0,0023$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{x+2} = 0,8476 \pm 0,0023$$